

---

---

## MITTLERE MOLEKÜLGESCHWINDIGKEIT

Es wird die mittlere Molekülgeschwindigkeit von Luftmolekülen mit Hilfe der Knudsen-Strömung bestimmt.

**Hinweis:**

*Beim Inbetriebsetzen der Apparatur bitte genau die Reihenfolge auf Seite 5 beachten!!!*

### Der Grundgedanke des Verfahrens

Gegeben seien zwei Räume, von denen einer gasgefüllt und der andere evakuiert ist. Beide Räume seien voneinander getrennt durch eine Wand, in der sich ein kleines Loch der Fläche  $A$  befindet. Durch das Loch strömt Gas in das Vakuum aus. Die formelmäßige Beschreibung dieser Strömung gestaltet sich ganz verschieden, je nachdem, ob der Durchmesser  $D$  des Loches klein oder groß gegenüber der freien Weglänge  $\lambda$  der Gasmoleküle im Gefäß ist. Da diese bei Luft von Atmosphärendruck etwa  $10^{-5}$  cm beträgt, gilt im allgemeinen  $\lambda \ll D$ .

Für das Folgende ist aber gerade der umgekehrte Fall von Bedeutung, nämlich  $\lambda \gg D$ . Es läßt sich dadurch realisieren, daß der Druck in dem gasgefüllten Raum in der Größenordnung 0,1 mbar gewählt wird und daß das Loch einen Durchmesser von einigen Zehntelmillimetern erhält.

Dieser Fall der Molekular- oder Knudsen-Strömung ( $\lambda \gg D$ ) ist theoretisch relativ einfach zu behandeln. Es kommt nämlich nicht mehr zu einer Gesamtströmung von Molekülen vor und hinter dem Loch, sondern zu einer Folge von Einzelereignissen.

Das einzelne Molekül, das bei geschlossenem Loch auf die Lochfläche aufgestoßen wäre, fliegt durch das Loch hindurch, ohne merkliche Wechselwirkung mit seinen Nachbarn. Es scheidet aus dem Spiel aus, und zwar, wenn auf der anderen Seite des Loches ein gutes Vakuum aufrechterhalten wird, ohne Gegenströmung. Man erhält also die Stärke der Molekularströmung aus der Zahl  $\Delta Z$  der Stöße von Gasmolekülen, die in der Zeit  $\Delta t$  auf die geometrische Fläche  $A$  des Loches treffen.

In der kinetischen Gastheorie wird gezeigt (siehe Anhang), daß diese Zahl proportional zu  $A$ ,  $\Delta t$  und zur mittleren Geschwindigkeit  $\langle c \rangle$  der Moleküle ist. Der quantitative Zusammenhang lautet:

$$\Delta Z = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle c \rangle A \Delta t \quad (1).$$

Dabei bedeutet  $N$  die Anzahl der Moleküle im Volumen  $V$  des gasgefüllten Raumes.

Da vorausgesetzt wird, daß auf der anderen Seite der Wand ein beliebig gutes Vakuum herrscht, also keine Rückströmung stattfindet, ist die Zahl  $\Delta Z$  der auftretenden Moleküle gleich der Abnahme  $-\Delta N$  der Anzahl  $N$  in der Zeit  $\Delta t$ , und man kann (1) schreiben:

$$-\frac{\Delta N}{N} = \frac{\langle c \rangle}{4V} A \Delta t = \kappa \Delta t \quad (2).$$

Nach der Zustandsgleichung der idealen Gase ist der Druck  $p \sim N$  und somit auch  $\Delta p \sim \Delta N$  mit demselben Proportionalitätsfaktor. Daher gilt nach (2) auch

$$\frac{\Delta p}{p} = -\kappa \Delta t \quad (3).$$

Wenn man aus der Druckabnahme im Gefäß  $\kappa$  ermittelt, ferner  $A$  und  $V$  kennt, so kann man  $\langle c \rangle$  berechnen. Für Luft, die ja kein einheitliches Gas darstellt, erhält man einen Mittelwert aus den Geschwindigkeiten der beteiligten Komponenten.

Die Differentialgleichung (3) ist sofort integrierbar. Man erhält

$$\ln p = \ln p_0 - \kappa t \quad (4)$$

oder in exponentieller Form:

$$p = p_0 e^{-\kappa t} \quad (5).$$

Dabei ist  $p_0$  der Druck zur Zeit  $t = 0$ .  $\kappa$  ist der Kehrwert einer Zeit oder

$$\kappa = \frac{1}{\tau} = \frac{\langle c \rangle A}{4V} \quad (6).$$

## Das Experimentelle

Experimentell wird folgendermaßen vorgegangen:

Eine Glaskugel vom bekannten Volumen  $V$ , in der der Gasdruck zuvor bereits um etwa 4 Zehnerpotenzen verringert worden ist, wird durch ein „kleines“ Loch mit einer Hochvakuumpumpe verbunden, die auf ihrer Seite den Druck um weitere 3 Zehnerpotenzen absenkt. Dann fließt durch das Loch der Fläche  $A$  eine Molekülströmung, für die die oben angeführte Formel gilt. Die Stärke der Gasströmung kann nun direkt dadurch gemessen werden, daß mit einem Meßinstrument der zeitliche Abfall des Druckes in der Glaskugel verfolgt wird.

### a – die Apparatur

Als Vorpumpe dient eine ölgedichtete Rotationspumpe, die unter dem Tisch steht. Sie ist über einen Kunststoffschlauch mit der nachfolgenden Öl-Dampfstrahlpumpe verbunden. Meist sind diese Pumpen aus Stahl gefertigt. Das vorliegende Glasmodell besitzt den Vorteil einer kürzeren Anheizzeit und läßt erkennen, was im Inneren vorgeht. Das Öl wird im Kolben links unten zum Sieden gebracht. Der (unsichtbare) Dampf strömt im rechten Pumpenteil durch Düsen nach unten, reißt dabei Luftmoleküle aus der Hochvakuumseite in Richtung Vorvakuum mit, wird durch Kühlwasser kondensiert und ins Siedegefaß zurückgeführt.

*Eine Dampfstrahlpumpe unterscheidet sich nicht sehr von einer Diffusionspumpe, doch sind bei ihr die Strömungsverhältnisse so geregelt, daß sie schon bei einem Vorvakuum von 3 Torr zu ziehen beginnt, während Diffusionspumpen dies meist erst ab 0,1 Torr tun. Dafür ziehen aber Dampfstrahlpumpen nur bis etwa  $10^{-4}$  Torr herunter.*

Die dann folgende gläserne Ausfriertasche (Kühlfalle), die mit flüssigem Stickstoff gekühlt wird, bildet eine Kryopumpe. Bei längerem Gebrauch kann der Dampfdruck des Öls infolge von Zersetzungseffekten über seinen Sollwert von weniger als  $10^{-4}$  Torr ansteigen. Die resultierenden Öldämpfe werden in der Kühlfalle ausgefroren und können nicht ins Vakuumgefäß gelangen.

Dann folgen in der Apparatur zwei Winkelhähne. Im Küken von Hahn 1 befindet sich ein Bronzeblech mit einem kleinen Loch. Dieser Hahn bleibt immer geöffnet. Parallel dazu liegt Hahn 2, der zum schnellen Evakuieren des nachfolgenden Glaskolbens dient.

Die Druckmessung in diesem Apparaturteil erfolgt mit Hilfe von zwei Meßröhren eines Pirani-Hitzdrahtmanometers. Die Meßröhre II dient dazu, den Druckabfall in dem großen Glaskolben während des Meßvorganges zu verfolgen. Die andere ist für Kontrollzwecke da und wird im Rahmen des Praktikumsbetriebes nicht benötigt. Das elektrische Anzeigegerät steht auf dem Tisch.

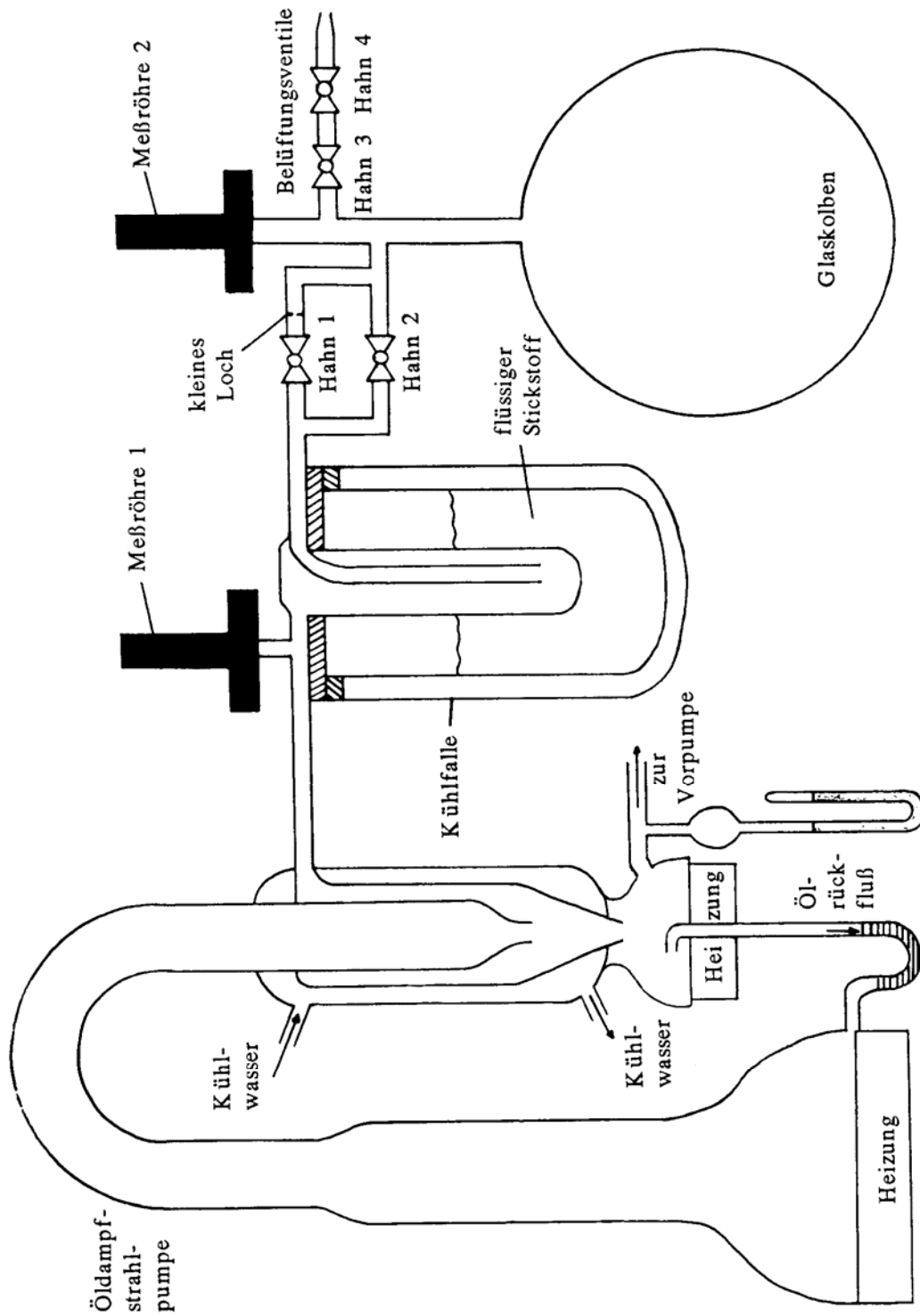


Abbildung 1: Aufbau der Apparatur

## b – das Inbetriebsetzen

- 1) Kontrollieren, daß Hahn 2 geöffnet ist.
- 2) Apparatur belüften. Dazu beide Belüftungsventile am Meßkolben rechts öffnen.
- 3) Pirani-Manometer einschalten. Die rote Kontrolllampe am Instrument muß aufleuchten.
- 4) Nach etwa 2 Minuten den Nullpunkt dieses Instrumentes genau einstellen.
- 5) Belüftungshähne wieder schließen.
- 6) Vorpumpe einschalten.
- 7) Kühlwasser für die Öl-Dampfstrahlpumpe vorsichtig anstellen.
- 8) Wenn die Vorpumpe den Druck etwa auf 0,2 Torr abgesenkt hat, mit Heizung der Dampfstrahlpumpe beginnen.
- 9) Wenn nach einigen Minuten diese Pumpe zu ziehen begonnen hat, Kühlfalle mit flüssigem Stickstoff füllen.
- 10) Beim Pirani-Manometer den „100“-Punkt einstellen.
- 11) Hahn 2 schließen, es bleibt nur das kleine Loch offen.
- 12) Vor Beginn der Messungen etwa 5 Minuten warten, damit das Fett des Winkelhahnes und die innere Glaswandoberfläche des Meßkolbens noch etwas „entgast“ werden.

Hierzu folgende Erläuterungen:

ad 2) Dieses kurzzeitige Belüften der Apparatur ist nötig, um den Nullpunkt des Pirani-Manometers einstellen zu können.

ad 4) Zum Drehen der Nullpunkt-Korrekturschraube ist ein als Schlüssel brauchbares Blechstück beigegeben. Nach Einstellung des Nullpunktes hält dieser sich im allgemeinen so gut, daß eine Nachjustierung während der Ausführung einiger Meßreihen nicht erforderlich ist. Dagegen macht die unter 10) geforderte Einstellung des „100“-Punktes Schwierigkeiten. Das Instrument reagiert dort träge, aber gleichzeitig überempfindlich auf das Drehen der Einstellschraube. Bei diesen Justierungen muß mit der Fingerkuppe leicht gegen das Gehäuse geklopft werden. Bei der „100“-Punkt-Einstellung ist nach jeder Meßreihe eine Nachkontrolle wünschenswert. Man beachte, daß die Korrekturschrauben nicht auf den Seiten angebracht sind, wo man sie erwartet.

ad 8) Die Anheizzeit der Pumpe beträgt etwa 10 Minuten. Sie läßt sich etwa halbieren, wenn der Heizstrom zuerst auf „maximal“ eingestellt und erst nach einigen Minuten auf „normal“ (ca. 70%) zurückgeschaltet wird. Seine Betriebstemperatur hat das Öl im Siedekolben, wenn der Meniskus des Öls im Rückflußrohr etwa 25 mm höher steht als an der Überflußstelle.

Unmittelbar nach Einschalten der Dampfstrahlpumpe verschlechtert sich vorübergehend der Druck der Apparatur, weil das Öl Luft abgibt, die es im kalten Zustand aufgenommen hat.

ad 9) Flüssigen Stickstoff besorgt der Assistent. Er wird in Metallgefäßen transportiert, die eine evakuierte Doppelwand aufweisen. Die Wahrscheinlichkeit des Implodierens ist sehr gering, aber trotzdem endlich. Auch für die gläserne Ausfriertasche gilt gleiches. Sie soll deshalb nur langsam mit dem flüssigen Stickstoff in Berührung gebracht werden. So lange sie noch nicht die tiefe Temperatur erreicht hat, bringt sie den flüssigen Stickstoff zum Aufkochen. Es können dann Flüssigkeitstropfen auf die Hand spritzen und ein Gefühl von

Nadelstichen auslösen. Dieser Effekt ist harmlos. Dagegen führt eine längere Abkühlung lebenden Gewebes mit flüssiger Luft zur völligen Gewebszerstörung.

#### c – die Messungen

- 1) Sie beginnen damit, daß in den Meßkolben etwas Luft eingelassen wird, bis dort ein Druck von etwa  $1/2$  Torr entsteht. Der einzige Weg hierzu ist folgender: Bei geschlossenem Hahn 4 (oben) wird Hahn 3 (unten) geöffnet und wieder geschlossen und anschließend Hahn 4 ebenfalls geöffnet und wieder geschlossen. Dadurch wird die kleine Luftmenge von etwa  $1 \text{ cm}^3$  Luft von Atmosphärendruck eingeschleust, die sich zwischen den beiden Hähnen befindet. Dieser Vorgang wird zweimal durchgeführt und damit die gewünschte Luftmenge im Gefäß erreicht.
- 2) Jetzt wird der zeitliche Verlauf des Druckabfalls im Meßkolben sorgfältig verfolgt. Die Stellung des Pirani-Manometers wird dazu alle 30 s abgelesen. Die auf dem Instrument gemachten Druckangaben sind nicht genau genug. Es ist vielmehr erforderlich, die Zeigerstellung auf der 100-teiligen Skala genau abzulesen und dann nachträglich die Druckwerte aus einer beigegebenen Eichkurve zu entnehmen.
- 3) Vor Wiederholung der Meßserie ist es ratsam, die erfolgten Ablesungen gleich auszuwerten, wie in Abschnitt „Auswertung“ näher angegeben wird. Während dieses Auswertens läßt man die Pumpen weiterlaufen. Es kann sich lohnen, die „100“-Einstellung des Manometers zu kontrollieren. Bei Wiederholung der Messungen wird meist eine geringe Abnahme der Auspumpzeit festgestellt.

#### d – das Abschalten

- 1) Heizung der Ölpumpe abschalten.
- 2) Kühlwasser abstellen
- 3) Den Hahn 2 mit dem großen Loch öffnen.
- 4) Die Vorpumpe ausschalten, sie wird automatisch belüftet.
- 5) Das Pirani-Manometer ausschalten.

Die Apparatur bleibt evakuiert, da sich das Öl der Dampfstrahlpumpe zersetzt, wenn es in heißem Zustand mit Luft von Atmosphärendruck in Berührung kommt, und ihr Öl löst in kaltem Zustand große Luftmengen.

### Die Auswertung

Die durch die Messung erhaltenen Werte von  $t$ ,  $p$  und  $\ln p$  werden in eine Tabelle eingetragen. Anschließend trägt man  $\ln p$  (Ordinate) gegen  $t$  (Abszisse) graphisch auf. Es soll sich nach (4) ein linearer Zusammenhang ergeben. Durch lineare Regression (graphisch und rechnerisch) ermittelt man die günstigste Steigung  $\alpha$ . Man erhält ein negatives  $\alpha$ , also ein positives  $\kappa$ , das in (6) eingesetzt ergibt:

$$\langle c \rangle = -\frac{4V}{A}\alpha \quad (7)$$

wobei gilt

Apparatur 1

$$A = 12,57 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$$

$$V = 2314 \text{ cm}^3$$

Apparatur 2

$$A = 12,57 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$$

$$V = 2295 \text{ cm}^3$$

Es ist schließlich noch von Interesse, den sich aus der kinetischen Gastheorie ergebenden  $\langle c \rangle$ -Wert in Betracht zu ziehen. Für ihn gilt

$$\langle c \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1,596 \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (8).$$

dabei ist  $k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  die Boltzmann-Konstante,  $T$  die absolute Temperatur des Gases (also in Kelvin:  $0^\circ\text{C} = +273 \text{ K}$ ),  $m$  die Masse eines Luftmoleküls (Mittelwert  $28,8 \text{ g/mol}$ ).

Nach der Auswertung empfiehlt es sich, den theoretischen und den experimentellen Wert unter Fehlerberücksichtigung miteinander zu vergleichen. Die aktuelle Temperatur kann dazu dem Thermometer entnommen werden.

Wie läßt sich ein eventuelles Abweichen des experimentellen Wertes, besonders zu geringeren Geschwindigkeiten, erklären?

### Anhang: Ableitung der Knudsen-Formel

A sei das Loch in der Trennwand T der beiden Gefäße. Im Gefäß mit dem größeren Druck betrachten wir das Volumenelement  $\Delta V$  in Polarkoordinaten

$$\Delta V = r^2 \sin \delta dr d\phi d\delta \quad (\text{A1}).$$

in dem sich eine Anzahl  $n \cdot \Delta V$  Moleküle mit einer Geschwindigkeitsverteilung befinden. Der Bruchteil der Moleküle mit einer Geschwindigkeit zwischen  $c$  und  $c + dc$  sei  $f(c) \cdot dc$ . Es ist:

$$n = \int_0^{\infty} f(c) dc$$

und

$$n \langle c \rangle = \int_0^{\infty} c f(c) dc = \langle c \rangle \int_0^{\infty} f(c) dc \quad (\text{A2}).$$

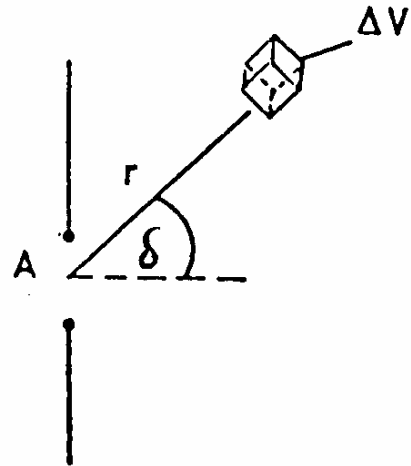


Abbildung 2

In  $\Delta V$  befinden sich also

$$dZ = f(c) dc \Delta V \quad (\text{A3})$$

Moleküle mit Geschwindigkeiten zwischen  $c$  und  $c + dc$ . Die Wahrscheinlichkeit  $\Delta\omega$ , daß diese Moleküle auf A auftreffen, kann man folgendermaßen finden.

Man betrachtet eine Kugel vom Radius  $r$  mit dem Mittelpunkt in  $\Delta V$ . Das Verhältnis aus der Projektion der Lochfläche und der gesamten Oberfläche der Kugel ( $4\pi r^2$ ) ist gleich der gesuchten Wahrscheinlichkeit, also

$$\Delta\omega = \frac{A \cos \delta}{4\pi r^2} \quad (\text{A4}).$$

In der Zeit  $\Delta t$  treffen nur Moleküle aus  $\Delta V$  auf A auf, wenn die Entfernung  $r$  des Volumens  $\Delta V$  von A höchstens  $r_{max} = c \cdot \Delta t$  beträgt. Die Gesamtzahl der Moleküle, die in  $\Delta t$  aus jedem Volumenelement und mit jeder Geschwindigkeit  $c$  das Loch A erreichen, erhält man, indem man (A3) mit (A4) multipliziert,  $\Delta V$  aus (A1) ersetzt und über alle Geschwindigkeiten und Volumenelemente bis höchstens  $r_{max}$  integriert:

$$\Delta Z = \frac{A}{4\pi} \int_0^{\infty} dc f(c) \int_0^{c \Delta t} dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\delta r^2 \sin \delta \frac{\cos \delta}{r^2} \quad (\text{A5}).$$



Das letzte Integral ist:

$$\int_0^{\pi/2} d\delta \sin \delta \cos \delta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\delta d\delta = -\frac{1}{4} \cos 2\delta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

Damit und mit (A2) wird (A5):

$$\Delta Z = \frac{A}{8\pi} n \langle c \rangle \Delta t 2\pi = \frac{A}{4} n \langle c \rangle \Delta t .$$

Auf den folgenden zwei Seiten:

Eichkurven für den Meßkopf II des Heraeus-Hitzdraht-Manometers

Oberste Kurve 30°C

Mittlere Kurve 25°C

Unterste Kurve 20°C

